
Περιεχόμενα

	Πρόλογος για την ύλη και τη δομή του βιβλίου	19
	1 Εισαγωγή.....	19
	2 Σκιαγράφημα της ύλης του βιβλίου	20
	3 Γενικά για τη δομή και διάρθρωση του βιβλίου.....	21
	4 Μερικές πρόσθετες διευκρινήσεις	22
	5 Ακροτελεύτιο	23
ΜΕΡΟΣ Α	ΠΡΟΛΟΓΟΜΕΝΑ	25
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	A.1 Προκαταρκτικά	27
	A1.1 Ονομασία	27
	A1.2 Γύρω από τη γένεση της Τριγωνομετρίας	28
	A1.3 Οι κύριοι θεμελιωτές της αρχαίας ελληνικής Τριγωνομετρίας .30	
	A1.4 Η Μαθηματική Σύνταξις του Κλαύδιου Πτολεμαίου.....	32
	A1.5 Προσπαιτούμενο μαθηματικό υπόβαθρο για τη μελέτη της Αλμαγέστης	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	A.2 «Αριθμείν και λογίζεσθαι»	37
	A2.0 Προλογικό σημείωμα	37
	A2.1 Σκιαγράφηση των αρχαίων ελληνικών αριθμογραφικών συστημάτων	38

	A2.2 Το αλφαριθμητικό αριθμογραφικό σύστημα	40
	A2.3 Εξηκονταδικά κλάσματα	42
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	A.3 Συνοπτική παρουσίαση των αρχών της Πτολεμαϊκής Τριγωνομετρίας	49
	A3.0 Προλογικό σημείωμα	49
	A3.1 Πτολεμαϊκή Χορδομετρία	50
	A3.2 Επίλυση επίπεδων (ευθυγράμμων) τριγώνων σύμφωνα με την Πτολεμαϊκή Μεθοδολογία	51
	A3.3 Επίλυση σφαιρικών τριγώνων σύμφωνα με την Πτολεμαϊκή Μεθοδολογία	53
ΜΕΡΟΣ Β	ΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΗ ΤΗΣ ΠΤΟΛΕΜΑΪΚΗΣ ΧΟΡΔΟΜΕΤΡΙΑΣ	55
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	B.1 Βασικά στοιχεία γωνιομετρίας και τόξομετρίας	57
	B1.0 Περί μεγεθών (Συνοπτική ανασκόπηση)	57
	B1.1 Γεωμετρικά μεγέθη εν χρήσει στην Πτολεμαϊκή Χορδομετρία	58
	B1.2 Περί γωνιών.....	60
	B1.3 Περί τόξων κύκλου.....	62
	B1.4 Αντιστοιχία γωνιών - τόξων	65
	B1.5 Περί χορδής τόξου κύκλου	70
	B1.6 Η χορδή κύκλου ως συνάρτηση του αντίστοιχου τόξου	74
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	B.2 Η θεωρία καταρτίσεως του Χορδομετρικού Πίνακα	81
	B2.0 Προλογικό σημείωμα	81
	B2.1 Αρχικές διενκρινίσεις	82
	B2.2 Οι χορδές πέντε βασικών τόξων	83
	B2.3 Χορδή παραπληρωματικού τόξου	87
	B2.4 Θεμελιώδες λήμμα	88
	B2.5 Χορδή της διαφοράς δύο τόξων.....	90
	B2.6 Χορδή του ημιτόξου.....	94
	B2.7 Χορδή του αθροίσματος δύο τόξων	98
	B2.8 Σκεπτικό για το επόμενο βήμα	102
	B2.9 Ληψιάτιο για τον λόγο «χορδή προς τόξο» στην περιοχή μικρών τόξων	103
	B2.10 Χορδή του τόξου 1° και του τόξου $1/2^\circ$	107
	B2.11 Συγκεφαλαίωση των αποτελεσμάτων.....	108
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	B.3 Ο Πτολεμαϊκός Χορδομετρικός Πίνακας	109
	B3.1 Προκαταρκτικά	109
	B3.2 Περιγραφή του Πτολεμαϊκού Χορδομετρικού Πίνακα	111
	B3.3 Ο πλήρης Χορδομετρικός Πίνακας	117

ΜΕΡΟΣ Γ	ΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΠΤΟΛΕΜΑΪΚΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ	137
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Γ.1 Γενικά περί της Πτολεμαϊκής μεθοδολογίας	139
	Γ1.1 Εισαγωγή.....	139
	Γ1.2 Γενικές αρχές.....	140
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Γ.2 Επίλυση ορθογωνίων ευθυγράμμων τριγώνων	143
	Γ2.1 Προκαταρκτικά.....	143
	Γ2.2 Συγκεφαλαίωση των βασικών μαθηματικών τύπων.....	144
	Γ2.3 Πρόβλημα ΥΓ.....	145
	Γ2.4 Πρόβλημα ΥΠ.....	146
	Γ2.5 Πρόβλημα ΓΠ.....	147
	Γ2.6 Πρόβλημα ΠΠ.....	148
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Γ.3 Επίλυση τυχόντος ευθυγράμμου τριγώνου	149
	Γ3.1 Προκαταρκτικά.....	149
	Γ3.2 Βασικές αρχές της μεθόδου επιλύσεως των σκαληνών τριγώνων.....	150
	Γ3.3 Πρόβλημα ΓΠΓ.....	153
	Γ3.4 Πρόβλημα ΠΓΠ.....	157
	Γ3.5 Πρόβλημα ΠΠΠ.....	161
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Γ.4 Θεμελιακές σχέσεις μεταξύ των κύριων στοιχείων ενός ευθυγράμμου τριγώνου	165
	Γ4.0 Προλογικό σημείωμα.....	165
	Γ4.1 Θεμελιακό σύστημα I εξισώσεων (των Ημιτόνων).....	165
	Γ4.2 Θεμελιακό σύστημα II εξισώσεων (των Συνημιτόνων).....	168
	Γ4.3 Ακροτελεύτια σχόλια.....	171
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Γ.5 Επίπεδης Τριγωνομετρίας παραδείγματα μέσα από την Αλμαγέστη	173
	Γ5.0 Πρόλογος.....	173
	Γ5.1 Παράδειγμα I: Μήκη σκιάς γνώμονα στη Ρόδο.....	174
	Γ5.2 Παράδειγμα II: Υπολογισμός στοιχείων συναφών με τη φαινομένη κίνηση και τροχιά του Ήλιου.....	180
	Γ5.3 Παράδειγμα III: Υπολογισμός στοιχείων συναφών με τη φαινομένη κίνηση και τροχιά της Σελήνης.....	185
ΜΕΡΟΣ Δ	ΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΗ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΠΤΟΛΕΜΑΪΚΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ	197
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Δ.0 Προοίμιο	199
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Δ.1 Λημμάτια βοηθητικά για το Θεώρημα Μενελάου	203
	Δ1.0 Πρόλογος.....	203
	Δ1.1 Εξωτερική διάτμηση ευθυγράμμου τριγώνου.....	205
	Δ1.2 Εσωτερική διάτμηση ευθυγράμμου τριγώνου.....	206
	Δ1.3 Εσωτερική διάτμηση κυκλικού τμήματος.....	207
	Δ1.4 Εξωτερική διάτμηση κυκλικού τμήματος.....	209

	Δ1.5 Πρακτικοί κανόνες για τους μαθηματικούς τύπους των Δ1.1 και Δ1.2	212
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Δ.2 Το Θεώρημα Μενελάου για την Σφαιρική Τριγωνομετρία	217
	Δ2.0 Πρόλογος	217
	Δ2.1 Εσωτερική διάτμηση σφαιρικού τριγώνου.....	218
	Δ2.2 Εξωτερική διάτμηση σφαιρικού τριγώνου.....	220
	Δ2.3 Πρακτικοί κανόνες για τους μαθηματικούς τύπους των Δ2.1 και Δ2.2	222
	Δ2.4 Πρόσθετα σχόλια.....	225
	Δ2.5 Επίμετρο στο Δ2 (Διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος Μενελάου)	225
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Δ.3 Δείγματα χρήσεως του Θεωρήματος Μενελάου κατά την απόδειξη διαφόρων προτάσεων, που αφορούν σε σφαιρικά τρίγωνα	235
	Δ3.0 Προλογικό σημείωμα	235
	Δ3.1 Δείγμα Πρώτο: Οι τρεις διάμεσοι σφαιρικού τριγώνου διέρχονται δι' ενός σημείου.....	236
	Δ3.2 Δείγμα Δεύτερο: Μετρικές σχέσεις συναφείς με την διχοτόμο εσωτερικής γωνίας σφαιρικού τριγώνου	237
	Δ3.3 Δείγμα Τρίτο: Οι διχοτόμοι των τριών εσωτερικών γωνιών σφαιρικού τριγώνου διέρχονται δι' ενός σημείου	239
	Δ3.4 Δείγμα Τέταρτο: Θεώρημα για τα σφαιρικά τρίγωνα, αντίστοιχο προς το του Ceva για τα ευθύγραμμα τρίγωνα	241
	Δ3.5 Δείγμα Πέμπτο: Θεώρημα για τα σφαιρικά τρίγωνα, αντίστοιχο προς το του Desargues για τα ευθύγραμμα τρίγωνα.....	245
	Δ3.6 Δείγμα Έκτο: «Διπλούς λόγος» των τεσσάρων σημείων, στα οποία τέμνεται μία ακτινωτή δέσμη 4 τόξων (μεγίστων κύκλων) από μια «διατέμνουσα» (περιφέρεια μέγιστου κύκλου)	248
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Δ.4 Ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα	251
	Δ4.0 Πρόλογος	251
	Δ4.1 Ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα 1ου είδους	254
	Δ4.2 Ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα 2ου είδους	260
	Δ4.3 Ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα 3ου είδους	262
	Δ4.4 Συμπληρωματικές διευκρινίσεις και σχόλια	264
	Δ4.5 Πρόσθετα δείγματα χρήσεως του Θεωρήματος Μενελάου κατά την απόδειξη διαφόρων προτάσεων, συναφών με σφαιρικά τρίγωνα	267
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Δ.5 Τυχόντα σφαιρικά τρίγωνα	273
	Δ.5.0 Πρόλογος	273
	Δ.5.1 Πρώτο θεμελιακό σύστημα εξισώσεων (Ημιτόνων).....	274
	Δ.5.2 Δεύτερο θεμελιακό σύστημα εξισώσεων (Συνημιτόνων)	276

	Δ.5.3 Συμπληρωματικές διευκρινίσεις και σχόλια	277
	Δ.5.4 Ένα παράδειγμα επίλυσης ενός ανισοσκελούς σφαιρικού τριγώνου.....	282
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	Δ.6 Σφαιρικής Τριγωνομετρίας παραδείγματα μέσα από την Αλμαγέστη	287
	Δ.6.1 Παράδειγμα I: Υπολογισμός τόξων των Ουρανίου Ισημερινού και Εκλειπτικής τόξων (Ωριαίων κύκλων)	287
	Δ.6.2 Παράδειγμα II: Υπολογισμός του τόξου του Ουρανίου Ισημερινού που περιλαμβάνεται ανάμεσα στο Εαρινό Ισημερινό Σημείο και σε ένα θεωρούμενο Ωριαίο Κύκλο.....	291
	Δ.6.3 Παράδειγμα III: Υπολογισμός του εύρους τόξων, που αποτεμονται επί της περιφέρειας του Οριζοντα, από τον Ισημερινό και την Εκλειπτική, όταν έχει δοθεί η διάρκεια της μεγαλύτερης ημέρας του έτους στον τόπο	293
	Δ.6.4 Παράδειγμα IV: Με τα ίδια, ως ανωτέρω (III), δεδομένα, να υπολογισθεί το «έξαγμα» του Πόλου και αντιστρόφως	299
 ΜΕΡΟΣ Ε	 ΣΥΝΟΠΤΙΚΟ ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ	 303
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	E.0 Εισαγωγή.....	305
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	E.1 Από την πρόομη αρχαιότητα μέχρι το 300 π.Χ.	309
	E1.0 Χρονολογικός Πίνακας	309
	E1.1 Ιχνηλασία στα αρχαία Αιγυπτιακά Μαθηματικά	311
	E1.2 Ιχνηλασία στα αρχαία Βαβυλωνιακά Μαθηματικά	314
	E1.3 Ιχνηλασία στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά της προεγκλειδίας περιόδου (650 π.Χ. έως 300 π.Χ.)	316
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	E.2 Από το 300 π.Χ. μέχρι το 150 μ.Χ.....	323
	E2.0 Χρονολογικός Πίνακας	323
	E2.1 Γεωγραφικό και ιστορικό υπόβαθρο	325
	E2.2 Βοηθητικές τριγωνομετρικές ανισότητες.....	328
	E2.3 Αρίσταρχος ο Σάμιος και η επίλυση ενός ευθύγραμμου ορθογωνίου τριγώνου.....	330
	E2.4 Αρχμήδης ο Συρακούσιος και η έμμεση συμβολή του στην ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας	334
	E2.5 Ερατοσθένης ο Κυρηναίος και ο προσδιορισμός του μήκους του γήινου Μεσημβρινού.....	336
	E2.6 Ίππαρχος ο Νικαεύς ή Ρόδιος και τα πρώτα ουσιαστικά βήματα προς την Τριγωνομετρία.....	338
	E2.7 Μενέλαος και το ομώνυμο θεώρημα για την Σφαιρική Τριγωνομετρία	338

	E2.8 Κλαύδιος Πτολεμαίος και η τελική διαμόρφωση και διατύπωση της αρχαίας ελληνικής Τριγωνομετρίας.....	338
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	E.3 Από το 150 μ.Χ. μέχρι σήμερα	339
	E3.0 Χρονολογικός Πίνακας της αρχικής περιόδου (150 μ.Χ. έως 529 μ.Χ.)	339
	E3.1 Η Τριγωνομετρία από τον Πτολεμαίο και μέχρι τις αρχές του 5ου μ.Χ. αιώνα	340
	E3.2 Η Τριγωνομετρία στις Ινδίες	342
	E3.3 Η Τριγωνομετρία στον Αραβικό κόσμο	345
	E3.4 Η Τριγωνομετρία στην Ευρώπη.....	348
ΜΕΡΟΣ Q	ΕΠΙΜΕΤΡΟ.....	363
ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑ Q.1	Τα κεφάλαια A.10, A.11 και A.13 της Μαθηματικής Συντάξεως» (Αλμαγέστης)	365
	Q1.0 Πρόλογος	365
	Q1.1 Το κεφάλαιο A.10 της Αλμαγέστης	367
	Q1.2 Το κεφάλαιο A.11 της Αλμαγέστης	376
	Q1.3 Το κεφάλαιο A.13 της Αλμαγέστης	378
ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑ Q.2	Γλωσσικά επιβοηθήματα.....	383
	Q2.1 Αρχαία ελληνικά αριθμητικά	384
	Q2.2 Αναλογίες (αρχαία ορολογία).....	386
	Q2.3 «Δύναμις» και «δύνασθαι» στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά	387
	Q2.4 Ρήματα των κεφαλαίων A.10, A.11 και A.13 της Αλμαγέστης, σχετικά με τα γεωμετρικά σχήματα.....	389
	Q2.5 Στοιχειώδες γλωσσάριο για τα κεφάλαια A.10, A.11 και A.13 της Αλμαγέστης	390
	Q2.6 Στοιχειώδες λατινικό γλωσσάριο	392
ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑ Q.3	Αναλυτική διαδικασία για την κατάρτιση του Πτολεμαϊκού Χορδομετρικού Πίνακα	395
	Q3.1 Πρόλογος	396
	Q3.2 Εισαγωγή.....	396
	Q3.3 Υπολογιστική διαδικασία «Α».....	398
	Q3.4 Υπολογιστική διαδικασία «Β».....	402
	Q3.5 Πλήθος των υπολογιστικών βημάτων	407
	Q3.6 Αριθμητικές πράξεις ανά υπολογιστικό βήμα	408
	Q3.7 Πλήθος των απαιτούμενων αριθμητικών πράξεων.....	409
ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑ Q.4	Επικουρικά θέματα, συναφή με τις πρόδρομες τριγωνομετρικές εργασίες	411
	Q4.1 Τα δύο «ευρήματα» του Θαλή	412

Q4.2	Απόδειξη των δύο βοηθητικών τριγωνομετρικών ανισοτήτων του §Δ4.2	418
Q4.3	Προσεγγιστικός υπολογισμός του $\sin 3^\circ$ από τον Αρίσταρχο τον Σάμιο (Προσάρτημα στο §Ε2.3).....	422
Q4.4	Εφαρμογές του Αρχιμήδειου θεωρήματος της τεθλασμένης χορδής στην Τριγωνομετρία	427
Q4.5	Ο κατ' εικασίαν Ιππάρχειος Χορδομετρικός Πίνακας.....	429
ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑ Q.5	Μονάδες μετρήσεως των επιπέδων γωνιών (από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα)	433
Q5.0	Προλογικό σημείωμα	434
Q5.1	Η «ορθή γωνία»	434
Q5.2	Η «μοίρα».....	434
Q5.3	Μερικές άλλες αρχαίες μονάδες	435
Q5.4	Ο «βαθμός»	436
Q5.5	Το «ακτίνιον» (rad)	437
Q5.6	Το «Mil» (χιλιοστόν).....	438
Q5.7	Ανεμοροόμβιοι.....	439
Q5.8	Ωρολογιακά δωδεκατοκύκλια.....	441
Q5.9	Ωριαία μονάδα γωνίας (ή τόξου).....	442
ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑ Q.6	Μαθηματικά επιβοηθήματα.....	443
Q6.1	Η πράξη της εξαγωγής τετραγωνικής ρίζας.....	444
Q6.2	Κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο	447
Q6.3	Σταχυολόγηση από τα «Σφαιρικά».....	448
Q6.4	Σφαιρικά τρίγωνα	452
Q6.5	Γενικές σχέσεις μεταξύ των κύριων στοιχείων ευθύγραμμου (επίπεδου) τριγώνου.....	459
Q6.6	Γενικές σχέσεις μεταξύ των κύριων στοιχείων σφαιρικού τριγώνου.....	460
Q6.7	Οι αποδείξεις των θεμελιωδών τύπων για τα σφαιρικά τρίγωνα	462
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ		
R	Βιβλιογραφία.....	467
S	Επισημειώσεις	475
U	Υπόμνημα για τα Μαθηματικά	493
V	Υπόμνημα για τα κείμενα.....	497