

# Περιεχόμενα

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Πρόλογος</b>                                                  | <b>xv</b> |
| <b>1 Απεικονίσεις</b>                                            | <b>1</b>  |
| 1.1 Τέσσερις κόσμοι, ένα μοτίβο . . . . .                        | 1         |
| 1.2 Η σύνθεση . . . . .                                          | 4         |
| 1.3 Η ταυτοτική απεικόνιση . . . . .                             | 5         |
| 1.4 Τι δεν είναι απεικόνιση δομής . . . . .                      | 6         |
| 1.5 Αντιμεταθετικά διαγράμματα . . . . .                         | 8         |
| 1.6 Ισομορφισμός: πότε δύο αντικείμενα «είναι τα ίδια» . . . . . | 9         |
| 1.7 Ακόμα ένας κόσμος: μερικώς διατεταγμένα σύνολα . . . . .     | 11        |
| 1.8 Ένα βήμα πίσω . . . . .                                      | 13        |
| Ασκήσεις . . . . .                                               | 14        |
| <b>2 Δύο νόμοι</b>                                               | <b>21</b> |
| 2.1 Η προσεταιριστικότητα . . . . .                              | 21        |
| 2.2 Η ταυτοτική απεικόνιση ως νόμος . . . . .                    | 23        |
| 2.3 Τα μονοπάτια σε γράφημα, ένας νέος κόσμος . . . . .          | 24        |
| 2.4 Τι σημαίνει παραβίαση . . . . .                              | 28        |
| 2.5 Ένας κόσμος, δύο νόμοι . . . . .                             | 29        |
| Ασκήσεις . . . . .                                               | 30        |
| <b>3 Κατηγορίες</b>                                              | <b>35</b> |
| 3.1 Ο ορισμός . . . . .                                          | 35        |
| 3.2 Οι κόσμοι ως κατηγορίες . . . . .                            | 37        |
| 3.3 Δύο ακραία παραδείγματα . . . . .                            | 38        |
| 3.4 Τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα ως κατηγορίες . . . . .       | 40        |
| 3.5 Hom-σύνολα . . . . .                                         | 41        |
| 3.6 Ισομορφισμός σε κατηγορία . . . . .                          | 42        |
| 3.7 Η αντίθετη κατηγορία . . . . .                               | 43        |

|          |                                                                     |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.8      | Μονομορφισμοί και επιμορφισμοί . . . . .                            | 45        |
| 3.9      | Αρχικά και τελικά αντικείμενα . . . . .                             | 47        |
| 3.10     | Άλλα παραδείγματα κατηγοριών . . . . .                              | 48        |
| 3.11     | Μικρές και μεγάλες κατηγορίες . . . . .                             | 50        |
| 3.12     | Ο χάρτης της κατηγορίας . . . . .                                   | 51        |
|          | Σύνοψη . . . . .                                                    | 51        |
|          | Ασκήσεις . . . . .                                                  | 52        |
| <b>4</b> | <b>Παραδείγματα σε βάθος</b>                                        | <b>59</b> |
| 4.1      | Η κατηγορία <b>Mat</b> <sub><math>\mathbb{F}</math></sub> . . . . . | 59        |
| 4.2      | Ανοικτά σύνολα ως κατηγορία . . . . .                               | 61        |
| 4.3      | Η κατηγορία <b>Rel</b> . . . . .                                    | 63        |
| 4.4      | Μονοπάτια σε τοπολογικό χώρο . . . . .                              | 66        |
| 4.5      | Σύγκριση . . . . .                                                  | 69        |
|          | Ασκήσεις . . . . .                                                  | 70        |
| <b>5</b> | <b>Συναρτητές</b>                                                   | <b>73</b> |
| 5.1      | Τρία παραδείγματα . . . . .                                         | 73        |
| 5.2      | Ο ορισμός . . . . .                                                 | 75        |
| 5.3      | Επιλήσιμονες συναρτητές . . . . .                                   | 76        |
| 5.3.1    | Πιστοί, πλήρεις και πλήρως πιστοί συναρτητές . . . . .              | 77        |
| 5.4      | Συναλλοιώτοι και ανταλλοιώτοι συναρτητές . . . . .                  | 80        |
| 5.5      | Οι συναρτητές <b>Hom</b> . . . . .                                  | 82        |
| 5.6      | Σύνθεση συναρτητών και η κατηγορία <b>Cat</b> . . . . .             | 84        |
| 5.7      | Ένα παράδειγμα από την αλγεβρική τοπολογία . . . . .                | 85        |
|          | Ασκήσεις . . . . .                                                  | 87        |
| <b>6</b> | <b>Φυσικοί Μετασχηματισμοί</b>                                      | <b>95</b> |
| 6.1      | Δύο χάρτες, μία χώρα . . . . .                                      | 95        |
| 6.2      | Γιατί γεννήθηκε η θεωρία κατηγοριών . . . . .                       | 95        |
| 6.3      | Από τον έναν συναρτητή στον άλλο . . . . .                          | 96        |
| 6.4      | Η συνθήκη φυσικότητας . . . . .                                     | 97        |
| 6.5      | Παραδείγματα . . . . .                                              | 98        |
| 6.6      | Φυσικός ισομορφισμός . . . . .                                      | 99        |
| 6.7      | Σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών . . . . .                           | 100       |

|          |                                                |            |
|----------|------------------------------------------------|------------|
| 6.8      | Η κατηγορία συναρτητών                         | 101        |
| 6.9      | Γιατί «φυσικός»;                               | 102        |
|          | Ασκήσεις                                       | 103        |
| <b>7</b> | <b>Ισοδυναμία Κατηγοριών</b>                   | <b>107</b> |
| 7.1      | Το ίδιο, χωρίς να είναι ίδιο                   | 107        |
| 7.2      | Πιστοί, πλήρεις και ουσιωδώς επί               | 107        |
| 7.3      | Ισοδυναμία κατηγοριών                          | 108        |
| 7.4      | Ο σκελετός μιας κατηγορίας                     | 109        |
| 7.5      | Τι σημαίνει «να μην ξεχωρίζεται από μέσα»      | 111        |
|          | Ασκήσεις                                       | 111        |
|          | Ασκήσεις σύνδεσης κεφαλαίων 5–7                | 116        |
| <b>8</b> | <b>Γινόμενα και Συν-γινόμενα</b>               | <b>119</b> |
| 8.1      | Καθολικές ιδιότητες: ο ορισμός μέσω της χρήσης | 119        |
| 8.2      | Το γινόμενο στα σύνολα                         | 120        |
| 8.3      | Η ίδια ιδέα αλλού                              | 121        |
| 8.4      | Γινόμενο σε κατηγορία και μοναδικότητα         | 121        |
| 8.5      | Το συν-γινόμενο στα σύνολα                     | 123        |
| 8.6      | Δυϊκότητα                                      | 124        |
| 8.7      | Συν-γινόμενο σε κατηγορία                      | 125        |
| 8.8      | Παραδείγματα                                   | 126        |
| 8.8.1    | Η κατηγορία <b>Set</b>                         | 126        |
| 8.8.2    | Η κατηγορία <b>Grp</b>                         | 126        |
| 8.8.3    | Η κατηγορία <b>Vect<sub>F</sub></b>            | 126        |
| 8.9      | Καθολικές ιδιότητες και ισομορφισμός           | 127        |
|          | Ασκήσεις                                       | 128        |
| <b>9</b> | <b>Εξισωτές και pullbacks</b>                  | <b>137</b> |
| 9.1      | Γιατί χρειαζόμαστε περισσότερες κατασκευές     | 137        |
| 9.2      | Ο εξισωτής                                     | 138        |
| 9.3      | Ο εξισωτής σε αλγεβρικές δομές                 | 140        |
| 9.4      | Pullback                                       | 141        |
| 9.5      | Ιδιότητες του pullback                         | 143        |
| 9.6      | Pullback και τομή συνόλων                      | 144        |

|           |                                                               |            |
|-----------|---------------------------------------------------------------|------------|
| 9.7       | Pushout: μια σύντομη ματιά . . . . .                          | 145        |
| 9.8       | Ανασκόπηση: γινόμενο, εξισωτής, pullback . . . . .            | 146        |
| 9.9       | Προετοιμασία για τα όρια . . . . .                            | 146        |
|           | Ασκήσεις . . . . .                                            | 147        |
| <b>10</b> | <b>Όρια</b>                                                   | <b>155</b> |
| 10.1      | Διαγράμματα . . . . .                                         | 155        |
| 10.2      | Κώνοι . . . . .                                               | 157        |
| 10.3      | Ορισμός ορίου . . . . .                                       | 160        |
| 10.4      | Γινόμενα ως όρια . . . . .                                    | 161        |
| 10.5      | Εξισωτές ως όρια . . . . .                                    | 162        |
| 10.6      | Pullbacks ως όρια . . . . .                                   | 162        |
| 10.7      | Κατασκευή ορίων από γινόμενα και εξισωτές . . . . .           | 163        |
| 10.8      | Παραδείγματα: <b>Set</b> και <b>Grp</b> . . . . .             | 165        |
| 10.9      | Ένα όριο είναι καθολική λύση συστήματος περιορισμών . . . . . | 167        |
|           | Ασκήσεις . . . . .                                            | 167        |
| <b>11</b> | <b>Συν-όρια και Πληρότητα</b>                                 | <b>175</b> |
| 11.1      | Συν-κώνοι . . . . .                                           | 175        |
| 11.2      | Ορισμός συν-ορίου . . . . .                                   | 177        |
| 11.3      | Συν-γινόμενα ως συν-όρια . . . . .                            | 179        |
| 11.4      | Pushout ως συν-όριο . . . . .                                 | 179        |
| 11.5      | Παραδείγματα στα σύνολα . . . . .                             | 181        |
| 11.6      | Ο συν-εξισωτής . . . . .                                      | 182        |
| 11.7      | Πλήρεις κατηγορίες . . . . .                                  | 186        |
| 11.8      | Συν-πλήρεις κατηγορίες . . . . .                              | 188        |
| 11.9      | Παραδείγματα: <b>Set</b> και <b>Grp</b> . . . . .             | 190        |
| 11.10     | Ανακεφαλαίωση . . . . .                                       | 191        |
|           | Ασκήσεις . . . . .                                            | 192        |
| <b>12</b> | <b>Το Λήμμα Yoneda</b>                                        | <b>199</b> |
| 12.1      | Πώς περιγράφεται ένα αντικείμενο . . . . .                    | 199        |
| 12.2      | Οι συναρτητές Hom . . . . .                                   | 199        |
| 12.3      | Αναπαραστάσιμοι συναρτητές . . . . .                          | 200        |
| 12.4      | Φυσικοί μετασχηματισμοί μεταξύ Hom-συναρτητών . . . . .       | 203        |

|           |                                                    |            |
|-----------|----------------------------------------------------|------------|
| 12.5      | Διατύπωση του λήμματος . . . . .                   | 204        |
| 12.6      | Συνέπειες. Αντικείμενα μέσω μορφισμών . . . . .    | 206        |
| 12.7      | Η εμφύτευση Yoneda . . . . .                       | 207        |
| 12.8      | Yoneda και καθολικές ιδιότητες . . . . .           | 208        |
| 12.9      | Το αντικείμενο ως σύνολο των σχέσεών του . . . . . | 210        |
|           | Ασκήσεις . . . . .                                 | 211        |
| <b>13</b> | <b>Συζυγείς Συναρτητές</b>                         | <b>219</b> |
| 13.1      | Η ελεύθερη ομάδα ως παράδειγμα κίνητρο . . . . .   | 219        |
| 13.2      | Η ίδια δομή αλλού . . . . .                        | 220        |
| 13.3      | Ορισμός της προσάρτησης . . . . .                  | 221        |
| 13.4      | Μονάδα μιας προσάρτησης . . . . .                  | 222        |
| 13.5      | Συν-μονάδα μιας προσάρτησης . . . . .              | 223        |
| 13.6      | Οι ταυτότητες τριγώνου . . . . .                   | 224        |
| 13.7      | Καθολική ιδιότητα ελεύθερων κατασκευών . . . . .   | 225        |
| 13.8      | Παραδείγματα . . . . .                             | 226        |
|           | Ασκήσεις . . . . .                                 | 229        |
| <b>14</b> | <b>Μονάδες</b>                                     | <b>235</b> |
| 14.1      | Κίνητρο: Η μονάδα List . . . . .                   | 235        |
| 14.2      | Από προσάρτηση σε μονάδα . . . . .                 | 237        |
| 14.3      | Η μονάδα της ελεύθερης κατασκευής . . . . .        | 238        |
| 14.4      | Άλγεβρες μονάδας . . . . .                         | 240        |
| 14.5      | Μονάδες και υπολογισμός . . . . .                  | 242        |
| 14.6      | Η σχέση μονάδων και προσαρτήσεων . . . . .         | 243        |
|           | Ασκήσεις . . . . .                                 | 245        |
| <b>15</b> | <b>Προ-δράγματα</b>                                | <b>251</b> |
| 15.1      | Η ανταλλοίωτη δράση του Hom . . . . .              | 251        |
| 15.2      | Τρία παραδείγματα . . . . .                        | 252        |
| 15.3      | Ορισμός και κατηγορία προ-δραγμάτων . . . . .      | 254        |
| 15.4      | Η εμφύτευση Yoneda . . . . .                       | 255        |
| 15.5      | Το Λήμμα Yoneda . . . . .                          | 256        |
| 15.6      | Αναπαραστάσιμα προ-δράγματα . . . . .              | 258        |
|           | Ασκήσεις . . . . .                                 | 260        |

|                                                          |                |
|----------------------------------------------------------|----------------|
| <b>16 Επίλογος: Πού φτάσαμε και πού μπορούμε να πάμε</b> | <b>265</b>     |
| 16.1 Η κόκκινη κλωστή . . . . .                          | 265            |
| 16.2 Τι δεν καλύψαμε . . . . .                           | 266            |
| 16.3 Πού να συνεχίσετε . . . . .                         | 267            |
| 16.4 Μια τελευταία παρατήρηση . . . . .                  | 267            |
| <br><b>A' Απεικονίσεις και Δομές</b>                     | <br><b>269</b> |
| A'.1 Δομές και οι απεικονίσεις τους . . . . .            | 269            |
| A'.1.1 Ομάδες . . . . .                                  | 269            |
| A'.1.2 Διανυσματικοί χώροι . . . . .                     | 270            |
| A'.1.3 Τοπολογικοί χώροι . . . . .                       | 270            |
| A'.2 Ομομορφισμός: το γενικό σχήμα . . . . .             | 271            |
| A'.3 Ισομορφισμός . . . . .                              | 271            |
| A'.4 Μονομορφισμός και Επιμορφισμός . . . . .            | 273            |
| A'.5 Ενδομορφισμός και Αυτομορφισμός . . . . .           | 273            |
| A'.6 Έρριψη, Επίρριψη και Αμφίρριψη . . . . .            | 274            |
| A'.7 Βασικές έννοιες τοπολογικών χώρων . . . . .         | 275            |
| A'.7.1 Νηματικές δέσμες . . . . .                        | 277            |
| <br><b>Βιβλιογραφία</b>                                  | <br><b>281</b> |